153 - Polynômes d'endomorphismes en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

Cadre : $\mathbb{K}$ est un corps, E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$.

I Polynômes d'endomorphismes

1) L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

Définition 1. Soit $P(X) = \sum_{i=0}^{p} a_i X^i \in \mathbb{K}[X]$. Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, on note :

$$P(f) = \sum_{i=0}^{p} a_i f^i \in \mathcal{L}(E) \quad \text{où} \quad f^k = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{k \text{ fois}}$$

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $P(A) = \sum_{i=0}^{p} a_i A^i \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition 2. L'application $\varphi_u : \mathbb{K}[X] \to \mathcal{L}(E)$ définie par $\varphi_u(P) = P(u)$ est un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbre. On note $\mathbb{K}[u]$ son image.

Remarque 3. *Comme $\mathbb{K}[X]$ est une algèbre commutative, $\mathbb{K}[u]$ aussi.*

Théorème 4 (Lemme des noyaux)**.** *Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P = P_1 \ldots P_k$ dans $\mathbb{K}[X]$ tel que les P_i sont premiers entre eux deux à deux, alors :*

$$\operatorname{Ker} P(f) = \bigoplus_{i=1}^{k} \operatorname{Ker} P_i(f)$$

2) Polynôme minimal

Définition 5. Le morphisme φ_u possède un noyau non trivial. Comme $\mathbb{K}$ est un corps, ce noyau est un idéal monogène de $\mathbb{K}[X]$, on note π_u son générateur unitaire, qu'on appelle polynôme minimal de u. C'est aussi le polynôme unitaire annulateur de u de plus petit degré.

Remarque 6. *Tout endomorphisme annule un polynôme non nul.*

Proposition 7. $\mathbb{K}[u] \cong \mathbb{K}[X]/\operatorname{Ker}(\varphi_u)$ *au sens des $\mathbb{K}$-algèbres.*

Proposition 8. *L'algèbre $\mathbb{K}[u]$ est de dimension $\deg \pi_u$, avec une base donnée par $(Id_E, u, \ldots, u^{\deg \pi_u - 1})$.*

Remarque 9. *Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$, si $Q(f) = 0$, alors $\pi_u | Q$.*

Définition 10. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, le scalaire λ est appelée valeur propre de u s'il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $u(x) = \lambda x$. On dit alors que x est un vecteur propre de u associé à λ.
On appelle spectre de u, noté $\operatorname{Sp}(u)$, l'ensemble des valeurs propres de u.

Remarque 11. *(i) 0 est valeur propre de u ssi $\operatorname{Ker} u \neq \{0\}$.*

(ii) Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on dit que $X \in \mathbb{K}^n$ est vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$. On note également $\operatorname{Sp}(A)$ le spectre de A. Si A est la matrice d'un endomorphisme u, $\operatorname{Sp}(u) = \operatorname{Sp}(A)$.

Définition 12. Soit λ une valeur propre de u. On définit E_λ par :

$$E_\lambda = \{x \in E \,|\, u(x) = \lambda x\} = \operatorname{Ker}(u - \lambda Id_E)$$

E_λ est un sous-espace vectoriel de E stable par u, appelé sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ.

Proposition 13. *Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ des valeurs propres distinctes de u, alors les sous-espaces propres $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_k}$ sont en somme directe.*

Proposition 14. *Si $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\lambda \in \operatorname{Sp}(f) \Leftrightarrow \pi_f(\lambda) = 0$.*

3) Polynôme caractéristique

Définition 15. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle polynôme caractéristique de A le polynôme de $\mathbb{K}[X]$ défini par $\chi_A(X) = \det(A - XI_n)$.

Remarque 16. *(i) $\chi_A(0) = \det A$*

(ii) Une matrice a même polynôme caractéristique que a transposée.

(iii) Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

Exemple 17. *Si $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)$, alors $\chi_A(X) = X^2 - 5X - 2$.*

Définition 18. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle polynôme caractéristique de u le polynôme caractéristique de la matrice de u, on le note χ_u.

Proposition 19. *λ est valeur propre de u ssi $\chi_u(\lambda) = 0$.*

Remarque 20. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On peut écrire :*

$$\chi_A(X) = \sum_{i=0}^{n} \beta_i X^i \text{ où } \beta_0 = (-1)^n \det A,\ \beta_{n-1} = -\operatorname{tr} A,\ \beta_n = 1$$

Proposition 21. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(f) = 0$.
Si λ est valeur propre de f, alors $P(\lambda) = 0$.*

Remarque 22. *χ_f et π_f ont les mêmes racines.*

Exemple 23. *(i) Si f est nilpotent d'ordre n, $\pi_f(X) = X^n = \chi_f(X)$.*

(ii) Si f est l'application nulle, $\pi_f(X) = X$ et $\chi_f(X) = X^n$.

Théorème 24 (Cayley-Hamilton)**.** *Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, $\chi_f(f) = 0$.*

II Réduction d'endomorphismes

1) Sous-espaces caractéristiques

Définition 25. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\chi_f(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^{s}(X-\lambda_i)^{\alpha_i}$. Pour tout i, le sous-espace vectoriel $N_i = \operatorname{Ker}(f-\lambda_i Id_E)^{\alpha_i}$ s'appelle le sous-espace caractéristique de f associé à la valeur propre λ_i.

Remarque 26. *(i) Pour tout i, N_i est stable par f et $\dim N_i = \alpha_i$.*

(ii) E est somme directe de ses sous-espaces stables.

Définition 27. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Il existe un unique $r \in \mathbb{N}^\star$ tel que :

$$\{0\} = \operatorname{Ker} f^0 \subsetneq \operatorname{Ker} f \subsetneq \ldots \subsetneq \operatorname{Ker} f^r = \operatorname{Ker} f^{r+1} = \ldots = \operatorname{Ker} f^q = \ldots$$

r s'appelle indice de f. C'est le plus petit entier tel que $\operatorname{Ker} f^r = \operatorname{Ker} f^{r+1}$.

Remarque 28. *(i)* $\forall q < r,\ \dim\operatorname{Ker} f^q < \dim\operatorname{Ker} f^r$

(ii) $\forall q \geqslant r,\ \dim\operatorname{Ker} f^q = \dim\operatorname{Ker} f^r$

(iii) Si f est nilpotent, son indice est égal à son indice de nilpotence.

(iv) $E = \operatorname{Im} f^0 \supsetneq \operatorname{Im} f \supsetneq \ldots \supsetneq \operatorname{Im} f^r = \operatorname{Im} f^{r+1} = \ldots = \operatorname{Im} f^q = \ldots$

Proposition 29. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ dont le polynôme caractéristique χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$, $\chi_f(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^{s}(X-\lambda_i)^{\alpha_i}$, alors :*

(i) Le polynôme minimal π_f de f est de la forme :

$$\pi_f(X) = \prod_{i=1}^{s}(X-\lambda_i)^{r_i} \text{ avec } \forall i, 0 \leqslant r_i \leqslant \alpha_i$$

(ii) r_i est l'indice de l'endomorphisme $f - \lambda_i Id_E$.

2) Diagonalisation et trigonalisation

Proposition 30. *Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel strict de E stable par f. En notant $g = f|_F$ la restriction de f à F, on a que g est dans $\mathcal{L}(E)$ et que χ_g divise χ_f.*

Proposition 31. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, et soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une racine de χ_f de multiplicité h, alors $\dim E_\lambda \leqslant h$.*

Théorème 32. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) f est diagonalisable

(ii) χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$, et toute racine λ est de multiplicité $\dim E_\lambda$.

(iii) Il existe des valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ de f vérifiant $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}$.

Application 33. *Un endomorphisme est diagonalisable si, et seulement si, il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$.*

Corollaire 34. *Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Supposons u diagonalisable (resp. trigonalisable). Alors $u|_F$ est diagonalisable (resp. trigonalisable).*

Théorème 35 (Co-réduction)**.** *Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes de E commutant deux à deux. Si les u_i sont diagonalisables (resp. trigonalisables), alors on peut les diagonaliser (resp. trigonaliser) dans une même base.*

3) Réduction de Jordan pour les nilpotents

Lemme 36. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent d'indice $q \geqslant 1$. Pour tout $x \in E$ tel que $u^{q-1}(x) \neq 0$, la famille $\mathcal{B}_{u,x} = (u^k(x))_{1\leqslant k\leqslant q-1}$ est une famille libre de E et l'espace vectoriel $F = \operatorname{Vect}(\mathcal{B}_{u,x})$ est u-stable.*

Théorème 37. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent d'indice $q \geqslant 1$. Alors il existe une base $\mathcal{B} = B_1 \cup \ldots \cup B_r$ de E telle que chaque s.e.v. $E_i = \operatorname{Vect}\mathcal{B}_i$ soit stable par u et que la matrice de $u|_{E_i}$ soit :*

$$J_i = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{q_i}(\mathbb{K}),\ \text{avec } q_i = \dim_{\mathbb{K}} E_i$$

Théorème 38. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ non nul tel que $\chi_u = \prod_{i=1}^{p}(X-\lambda_i)^{\alpha_i}$ et $\Pi_u = \prod_{i=1}^{\rho}(X-\lambda_i)^{\beta_i}$. Il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u soit de la forme $A = \operatorname{Diag}(J_1, \ldots, J_\rho)$ avec pour tout $k \in [\![1,\rho]\!]$:*

$$J_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \varepsilon_{k,2} & \lambda_k & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \varepsilon_{k,\alpha_k-1} & \lambda_k & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \varepsilon_{k,\alpha_k} & \lambda_k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{\alpha_k}(\mathbb{K}),\ \text{où } \varepsilon_{k,i} \in \{0,1\}$$

III Applications

1) Décomposition de Dunford

Proposition 39. *Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $F \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur de f. Soit $F = \beta M_1^{\alpha_1} \cdots M_s^{\alpha_s}$ la décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$ du polynôme F. Pour tout i, on note $N_i = \operatorname{Ker} M_i^{\alpha_i}(f)$. Alors :*

- *(i)* $E = \bigoplus_{i=1}^{s} N_i$
- *(ii) Pour tout i, la projection sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} N_j$ est un polynôme en f.*

Théorème 40 (Décomposition de Dunford)**.** *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ dont le polynôme caractéristique χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$. Alors il existe un unique couple (n, d) d'endomorphismes tels que :*

- *(i) d est diagonalisable, n est nilpotent*
- *(ii) $f = d + n$ et n et d commutent*

De plus, d et n sont des polynômes en f

Application 41. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$. Soit $A = D + N$ sa décomposition de Dunford, alors la décomposition de Dunford de e^A est donnée par $e^A = e^D + e^D(e^N - I_n)$ avec e^D diagonalisable et $e^D(e^N - I)$ nilpotente.*

2) Applications en calcul matriciel

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de polynôme caractéristique $\chi_A(X) = \sum_{i=0}^{n} \beta_i X^i$.

Proposition 42. *Soit P un polynôme annulateur de A. En effectuant la division euclidienne de X^k par P, on a $X^k = PQ + R$, donc $A^k = R(A)$. En particulier, on peut prendre $P = \chi_A$.*

Exemple 43. *Si $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, alors $A^2 - A - 2I_3 = 0$. Il vient alors que $A^k = a_k A + b_k I_3$ par la proposition. Comme -1 et 2 sont valeurs propres de A, on a $(-1)^k = -a_k + b_k$ et $2^k = 2a_k + b_k$. On en déduit que :*

$$A^k = \frac{2^k + (-1)^{k+1}}{3} A + \frac{2^k + 2(-1)^k}{3} I_3$$

Proposition 44. *Si A est inversible, alors $\det A = \beta_0 \neq 0$, et :*

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_0} \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i A^{i-1} \right)$$

Exemple 45. *Si $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, alors $A^2 - A - 2I_3 = 0$, puis $A\left(\frac{1}{2}(A - I_3)\right) = I_3$. Il vient alors que $A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I_3)$.*

Proposition 46. *Soit $A = D + N$ la décomposition de Dunford de A :*

$$\exp(A) = \exp(D)\exp(N)$$

où $\exp(D)$ est calculé par diagonalisation, et $\exp(N)$ est une somme finie.

Exemple 47. *Si $A = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, alors :*

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} e^3 & 0 \\ 0 & e^3 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} e^3 & 2e^3 \\ 0 & e^3 \end{pmatrix}$$

Développements

- Réduction de Jordan (par la dualité) (36,37,38) [Rom20]
- Décomposition de Dunford (39,40) [Gou94]

Références

[Gou94] X. Gourdon. *Les Maths en Tête : Algèbre.* Ellipses, 2e édition

[FGN13b] S. Francinou, H. Gianella, et S. Nicolas. *Oraux X-ENS Algèbre 2.* Cassini

[Rom20] J.-E. Rombaldi. *Algèbre et Géométrie.* DeBoeck